Recurrences at the International Mathematical Olympiad

Juan López Linares, Alexys Bruno-Alfonso and
Grazielle Feliciani Barbosa

February 22, 2020

PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.7, n.15, 2019
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715

Recorrências na Olimpíada Internacional de Matemática

Juan López Linares Alexys Bruno-Alfonso Grazielle Feliciani Barbosa

Resumo

Alguns exercícios de olimpíadas internacionais requerem uma solução em múltiplos passos onde se integram várias habilidades matemáticas. Neste artigo discutimos detalhadamente três problemas propostos para Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO) onde o foco está em lidar com recorrências e cada uma delas pode ser associada com uma sequência de números reais. No primeiro problema a recorrência é uma igualdade de segunda ordem, linear e não homogênea e se pede mostrar a validade de determinada propriedade. No segundo a lei de recorrência é definida usando uma desigualdade de segunda ordem linear e homogênea e deve-se mostrar que vale outra desigualdade para os termos da sequência correspondente. No terceiro problema a recorrência é de primeira ordem, porém não linear, e se requere encontrar uma fórmula fechada (explícita) para os termos da sequência relacionada. Os exercícios permitem treinar o uso de várias técnicas como somas e produtos telescópicos, soma de uma progressão aritmética e geométrica e demonstração por contradição.

Palavras-chave: Olimpíada Internacional de Matemática; Sequências; Ensino Médio; Ensino Universitário; Recorrências

Abstract

Some international olympics exercises require a multi-step solution that integrates various mathematical skills. In this article we discuss in detail three problems proposed for the International Mathematical Olympiad (IMO) where the focus is on dealing with recurrences and each of them can be associated with a sequence of real numbers. In the first problem, recurrence is a second order equality, linear and inhomogeneous, and it is asked to show the validity of a given property. In the second, the law of recurrence is defined using a second-order linear and homogeneous inequality and it must be shown that another inequality is valid for the terms of the corresponding sequence. In the third problem, recurrence is of the first order, but not linear, and it is necessary to find a closed (explicit) formula for the terms of the related sequence. The exercises allows to train the use of various techniques such as sums and telescopic products, the sum of an arithmetic and geometric progression and demonstration by contradiction.

Keywords: International Mathematical Olympiad; Sequences; High School Education; University Teaching; Recurrences

1. Introdução

É comum que os valores ou as propriedades de sequências numéricas sejam expressos mediante uma relação entre o termo n-ésimo da sequência e os anteriores. Usar recorrências pode ser a forma mais simples de formular matematicamente um problema da vida real. Porém, no Ensino Médio o estudo das mesmas usualmente é restrito a recorrências de primeira ordem, lineares e homogêneas, tais como as progressões aritméticas e geométricas. Uma excelente introdução ao estudo de relações de recorrência pode ser encontrada na Ref. [1].

Neste artigo detalhamos a resolução de problemas da Olimpíada Internacional de Matemática, visando incentivar estudantes e professores do Ensino Fundamental e Médio na aprendizagem de conceitos e desenvolvimento de habilidades referentes ao interessante tema das leis e desigualdades de recorrência. Anteriormente, em um artigo nesta revista, discutimos três problemas IMO sobre Bases Numéricas [2]. Outros dois artigos deste grupo de autores tratam da Série Harmônica [3] e de Desigualdades [4].

Para descrever os problemas de interesse necessitamos de algumas definições e classificações. Uma lei de recorrência para uma sequência de números reais (a_n) tem a forma $a_{n+1} = F_n(a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1)$, em que F_n é uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. A lei de recorrência é de ordem m quando $a_{n+m} = f_n(a_{n+m-1}, a_{n+m-2}, \cdots, a_n)$, em que f_n é uma função de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$. A lei de recorrência de ordem m é linear quando $f_n(a_{n+m-1}, a_{n+m-2}, \cdots, a_n) = b_n - \left[c_{1,n}\, a_{n+m-1} + c_{2,n}\, a_{n+m-2} + \cdots + c_{m,n}\, a_n\right]$, em que (b_n) e as $(c_{j,n})$, com $j = 1, 2, \ldots, m$, são sequências de números reais. A lei de recorrência de ordem m, linear, será homogênea quando (b_n) for a sequência identicamente nula. As desigualdades de recorrência são definidas do mesmo jeito, substituindo o sinal de igualdade por $\geq$, $\leq$, $>$ ou $<$.

O primeiro problema, proposto em 1984, é apresentado e resolvido na Seção 2. Trata de uma relação de recorrência de segunda ordem que é linear e não homogênea e propõe que seja demonstrada a validade de uma determinada propriedade. A Seção 3 trata do segundo, que foi proposto em 1975 e se refere a uma desigualdade de recorrência de segunda ordem linear e homogênea. Ela deve ser usada para provar uma outra desigualdade. No terceiro problema, discutido na Seção 4, é preciso usar uma relação de recorrência, de primeira ordem e não linear, para obter uma fórmula explícita para o termo geral da sequência em questão. Este foi proposto em 1981.

2. Recorrência de Segunda Ordem-I. SL da IMO 1984 P6

Problema 1. Seja c um inteiro positivo. A sequência (f_n) se define como: $f_1 = 1$, $f_2 = c$, e

$$f_{n+1} = 2f_n - f_{n-1} + 2 \quad (n \geq 2). \tag{1}$$

Mostre que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f_k f_{k+1} = f_r$.

A IMO 1984 foi realizada na cidade de Praga, antiga Checoslováquia, atualmente República Checa [5]. O problema acima foi proposto pela delegação do Canadá [6].

Resolução: A relação de recorrência (1) pode ser reescrita como

$$f_{n+1} - f_n = f_n - f_{n-1} + 2 \quad (n \geq 2). \tag{2}$$

Vamos escrever agora a recorrência para diferentes valores de n para por em evidência uma soma telescópica:

$$(f_3 - f_2) = (f_2 - f_1) + 2,$$

$$
\begin{aligned}
(f_4 - f_3) &= (f_3 - f_2) + 2,\\
(f_5 - f_4) &= (f_4 - f_3) + 2,\\
&\vdots\\
(f_n - f_{n-1}) &= (f_{n-1} - f_{n-2}) + 2,\\
(f_{n+1} - f_n) &= (f_n - f_{n-1}) + 2.
\end{aligned}
$$

Somando todas as equações anteriores encontramos

$$f_{n+1} - f_n = f_2 - f_1 + 2 \cdot (n-1). \tag{3}$$

Escrevendo de forma explícita a equação (3) para diferentes valores de n fica em evidência outra soma telescópica

$$
\begin{aligned}
f_3 - f_2 &= (c-1) + 2 \cdot 1,\\
f_4 - f_3 &= (c-1) + 2 \cdot 2,\\
f_5 - f_4 &= (c-1) + 2 \cdot 3,\\
&\vdots\\
f_n - f_{n-1} &= (c-1) + 2 \cdot (n-2).
\end{aligned}
$$

Somando todas as equações anteriores encontramos

$$
\begin{aligned}
f_n - f_2 &= (n-2)(c-1) + 2 \cdot (1 + 2 + \cdots + (n-2)),\\
f_n &= c + (n-2)(c-1) + (n-1)(n-2),\\
f_n &= n^2 + (c-4)n + (4-c).
\end{aligned}
$$

Chamando $b = c - 4$ temos uma fórmula explícita para a sequência (f_n):

$$f_n = n^2 + bn - b. \tag{4}$$

Trocando n por k e $k+1$ em (4) escrevemos:

$$
\begin{aligned}
f_k f_{k+1} &= \left(k^2 + bk - b\right)\left((k+1)^2 + b(k+1) - b\right),\\
f_k f_{k+1} &= k^4 + 2(b+1)k^3 + (b^2 + b + 1)k^2 - (b^2 + b)k - b. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Queremos encontrar um número natural r tal que $f_k f_{k+1} = f_r$. Como $f_k f_{k+1}$ é um polinômio de grau 4 em k por (5) e f_r é um polinômio de grau 2 em r por (4) devemos fazer r um polinômio de grau 2 em k. Seja

$$r = k^2 + pk + q \tag{6}$$

onde p e q são inteiros a serem determinados. De (4) e (6) segue que

$$
\begin{aligned}
f_r = f_{k^2+pk+q} &= \left(k^2 + pk + q\right)^2 + b\left(k^2 + pk + q\right) - b,\\
f_r &= k^4 + 2pk^3 + \left(p^2 + 2q + b\right)k^2 + p(2q+b)k + \left(q^2 + bq - b\right). \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Igualando os coeficientes respectivos de cada potência de k em (5) e (7) chegamos a um sistema de equações com variáveis p e q:

$$p = b + 1, \tag{8}$$

$$p^2 + 2q = b^2 + 1, \tag{9}$$

$$p(2q + b) = -(b^2 + b), \tag{10}$$

$$q^2 + bq = 0. \tag{11}$$

Substituindo $p = b + 1$ de (8) em (9) encontramos $q = -b$. O valor de $q = 0$, solução de (11), não satisfaz o sistema.

Logo, voltando em (6), o valor de r procurado é

$$r = k^2 + (b + 1)k - b. \tag{12}$$

ou, usando que $b = c - 4$,

$$r = k^2 + (c - 3)k - c + 4.$$

Temos que r é o resultado da soma e produto de inteiros, logo r será um número inteiro. Como c e k são inteiros e no mínimo 1 teremos que r é no mínimo 2:

$$r = k^2 + (c - 3)k - (c - 4),$$

$$r = [(k - 1) + 1]^2 + [(c - 1) - 2][(k - 1) + 1] - [(c - 1) - 3],$$

$$r = (k - 1)^2 + 2(k - 1) + 1 + (c - 1)(k - 1) + (c - 1) - 2(k - 1) - 2 - (c - 1) + 3,$$

$$r = (k - 1)^2 + (c - 1)(k - 1) + 2 \geq 2.$$

De (4) a equação (12) também pode ser escrita como

$$r = f_k + k$$

e a propriedade da sequência reescrita como

$$f_k f_{k+1} = f_{f_k + k}.$$

3. Recorrência de Segunda Ordem-II. SL da IMO 1975 P4

Problema 2. Seja $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ uma sequência de números reais tais que

$$0 \leq a_n \leq 1 \tag{13}$$

e

$$a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geq 0 \tag{14}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que

$$0 \leq (n + 1)(a_n - a_{n+1}) \leq 2 \tag{15}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

A IMO 1975 foi realizada na cidade de Bulgas e Sófia, Bulgária [5]. O problema acima foi proposto pela delegação da Suécia [6].

Resolução: Inicialmente notamos que a relação de recorrência (14) pode ser escrita de forma mais simétrica como

$$a_n - a_{n+1} \geq a_{n+1} - a_{n+2}. \tag{16}$$

A desigualdade anterior e a que queremos provar sugerem definir a variação Δa_n como

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1}. \tag{17}$$

Usando a definição anterior reescrevemos (16) e (15) como

$$\Delta a_n \geq \Delta a_{n+1} \tag{18}$$

e

$$0 \leq (n+1)\Delta a_n \leq 2. \tag{19}$$

Notamos que o fato da desigualdade (18) ser válida para todo número natural implica que se j e l são números naturais, com $j < l$, então

$$\Delta a_j \geq \Delta a_l. \tag{20}$$

Temos duas desigualdades para provar em todo $n \in \mathbb{N}$: i) $0 \leq (n+1)\Delta a_n$ e ii) $(n+1)\Delta a_n \leq 2$.

i) $0 \leq (n+1)\Delta a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como n+1 é um número positivo basta provar que $\Delta a_n \geq 0$ para todo n. Suponhamos, por absurdo, que exista algum número natural $n = n_0$ tal que

$$\Delta a_{n_0} < 0. \tag{21}$$

Segue de (20) que para todo número natural $k \geq n_0$ teremos

$$\Delta a_{n_0} \geq \Delta a_k. \tag{22}$$

Seja m um número natural. Vamos procurar uma relação entre a diferença $a_{n_0} - a_{n_0+m}$ e a variação Δa_{n_0}:

$$a_{n_0} - a_{n_0+m} = \left(a_{n_0} - a_{n_0+1}\right) + \left(a_{n_0+1} - a_{n_0+2}\right) + \cdots + \left(a_{n_0+m-1} - a_{n_0+m}\right),$$
$$a_{n_0} - a_{n_0+m} = \Delta a_{n_0} + \Delta a_{n_0+1} + \cdots + \Delta a_{n_0+m-1}.$$

Por (22) os m somandos no lado direito da equação anterior são menores ou iguais a Δa_{n_0}:

$$a_{n_0} - a_{n_0+m} \leq \Delta a_{n_0} + \Delta a_{n_0} + \cdots + \Delta a_{n_0},$$
$$a_{n_0} - a_{n_0+m} \leq m\Delta a_{n_0}. \tag{23}$$

Por (21) sempre podemos escolher um valor de $m = m_0$ suficientemente grande tal que $m_0 \Delta a_{n_0} < -1$. Segue que para todo $m \geq m_0$ teremos

$$a_{n_0} - a_{n_0+m} < -1. \tag{24}$$

Esta última desigualdade é um absurdo pois por (13) devemos ter que

$$-1 \leq a_{n_0} - a_{n_0+m} \leq 1.$$

Concluímos que $\Delta a_n \geq 0$ e vale que $0 \leq (n+1)\Delta a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) $(n+1)\Delta a_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Inicialmente vamos estudar a soma

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

De (13) temos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 1 + 1 + \cdots + 1 = n. \tag{25}$$

A seguir vamos estudar outra soma usando as variações Δa_k:

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k = (a_1 - a_2) + 2\,(a_2 - a_3) + 3\,(a_3 - a_4) + \cdots + (n-1)\,(a_{n-1} - a_n) + n\,(a_n - a_{n+1})\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na_{n+1},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - na_{n+1}.$$

Logo

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k + na_{n+1}. \tag{26}$$

Juntando (25) e (26) obtemos a desigualdade

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k + na_{n+1} \leq n. \tag{27}$$

Notamos agora que

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k \leq \sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k + na_{n+1}$$

pois na_{n+1} é um número não negativo. De (27) e a desigualdade anterior segue que

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k \leq n. \tag{28}$$

Por outro lado, temos

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k = \Delta a_1 + 2\Delta a_2 + \cdots + n\Delta a_n.$$

Neste ponto usamos a relação de recorrência (20) que determina que se $k \leq n$ então $\Delta a_k \geq \Delta a_n$:

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k \geq \Delta a_n + 2\Delta a_n + \cdots + n\Delta a_n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k \geq (1 + 2 + \cdots + n)\,\Delta a_n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k \geq \frac{n\,(n+1)}{2}\Delta a_n. \tag{29}$$

Juntas as desigualdades (28) e (29) garantem o que queríamos demonstrar:

$$\frac{n\,(n+1)}{2}\Delta a_n \leq \sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k \leq n,$$

$$\frac{n\,(n+1)}{2}\Delta a_n \leq n.$$

Concluímos que vale $(n+1)\,\Delta a_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Recorrência Não Linear. SL da IMO 1981 P9

Problema 3. A sequência (a_n) está definida pela relação de recorrência $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}}{16}. \tag{30}$$

Encontre uma fórmula explícita para a_n.

A IMO 1981 foi realizada na cidade de Washington, Estados Unidos [5]. O problema acima foi proposto pela delegação da antiga Alemanha Ocidental [6].

Resolução: Primeiramente observamos que $a_n > 0$ implica $a_{n+1} > 0$. Como $a_1 > 0$, o princípio de indução finita garante que a_n seja um número real positivo para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para eliminar a raiz quadrada, definimos a sequência (b_n) tal que

$$b_n = \sqrt{1 + 24a_n} > 0. \tag{31}$$

Segue que

$$a_n = \frac{b_n^2 - 1}{24}. \tag{32}$$

Substituindo (32) em (30) e simplificando encontramos

$$\frac{2}{3}b_{n+1}^2 = \frac{3}{2} + \frac{b_n^2}{6} + b_n,$$

$$b_{n+1}^2 = \frac{b_n^2}{4} + \frac{3}{2}b_n + \frac{9}{4} = \left(\frac{b_n + 3}{2}\right)^2.$$

Logo teremos

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}, \tag{33}$$

uma recorrência linear e não homogênea para (b_n). Quando $a_1 = 1$ usando (31) encontramos $b_1 = 5$.

Como o coeficiente que acompanha b_n em (33) não é 1, primeiro procuramos uma solução da equação homogênea correspondente:

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n.$$

Temos que (c_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, logo uma solução é $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Segundo, seja $b_n = c_n \cdot d_n$ ou

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot d_n. \tag{34}$$

Como $b_1 = 5$ teremos $d_1 = 5$.

Substituindo a equação (34) em (33) e simplificando encontramos

$$d_{n+1} = d_n + 3 \cdot 2^{n-1} \quad \forall\, n \geq 1. \tag{35}$$

Isto é, a sequência (d_n) é linear e não homogênea como a sequência (b_n), porém agora o coeficiente que acompanha d_n é 1.

Reescrevendo a equação anterior para valores do subíndice variando entre 1 e $n - 1$:

$$d_2 = d_1 + 3 \cdot 1,$$

$$d_3 = d_2 + 3 \cdot 2,$$

$$d_4 = d_3 + 3 \cdot 2^2,$$

$$\vdots$$

$$d_n = d_{n-1} + 3 \cdot 2^{n-2}$$

e somando todas as equações anteriores (soma telescópica) encontramos

$$d_n = d_1 + 3\left(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}\right) \quad \forall\, n \geq 2.$$

A soma entre parênteses na linha anterior é de uma progressão geométrica de razão 2, logo

$$d_n = 5 + 3\left(2^{n-1} - 1\right) \quad \forall n \geq 1. \tag{36}$$

Substituindo o resultado anterior em (34) e simplificando encontramos

$$b_n = 3 + 4 \cdot 2^{-n} \quad \forall n \geq 1. \tag{37}$$

Juntando as fórmulas em (37) e (32) obtemos:

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{2^n} + \frac{1}{2^{2n-1}}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \quad \forall n \geq 1.$$

5. Conclusões

Neste artigo foram discutidos detalhadamente três problemas sobre recorrências propostos para olimpíadas internacionais de Matemática. No primeiro problema a recorrência foi de segunda ordem, linear e não homogênea e se mostrou a validade de determinada propriedade satisfeita por todos os termos da sequência associada. No segundo a lei de recorrência foi definida usando uma desigualdade de segunda ordem linear e homogênea e se mostrou a validade de outra desigualdade para os termos da sequência correspondente. No terceiro problema a recorrência foi de primeira ordem, porém não linear e encontramos uma fórmula fechada para os termos da sequência relacionada. Os exercícios permitem treinar o uso de várias técnicas como somas e produtos telescópicos, soma de uma progressão aritmética e geométrica e demonstração por contradição. Soluções minuciosas de outros vinte e quatro problemas IMO podem ser encontradas em [7].

Referências

[1] MORGADO, A. C. e P. C. P. CARVALHO, Matemática Discreta, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, 2015.

[2] LÓPEZ J., BRUNO-ALFONSO A. e BARBOSA G.F., Bases Numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática, Professor de Matemática Online (PMO), Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática, v.7, n.2, páginas 195-204, publicado em 10/10/2019, ISSN: 2319-023X, disponível em: http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/dlm_uploads/2019/10/art15_vo7_2019_PMO_SBM-2.pdf. Acesso em: 22 fev 2020.

[3] LÓPEZ, J., BRUNO-ALFONSO A. e BARBOSA G.F., Três Problemas sobre Série Harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática, aceito para publicação na revista CQD, ISSN 2316-9664, Volume 17, fev. 2020, preprint disponível em: https://easychair.org/publications/preprint/kBtv. Acesso em: 22 fev 2020.

[4] LÓPEZ, J., BRUNO-ALFONSO A. e BARBOSA G.F., Três Problemas sobre Desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática, enviado a publicar na revista CQD, ISSN 2316-9664, 2020.

[5] INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD. Problems. 2019. Disponível em: http://www.imo-official.org/problems.aspx. Acesso em: 22 fev 2020.

[6] DJUKIC, D. et al. The IMO compendium - a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004. New York: Springer, 2006. Disponível em: http://web.cs.elte.hu/~nagyzoli/compendium.pdf. Acesso em: 22 fev 2020.

[7] LÓPEZ, J., Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do Ensino Médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática, Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)- Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos]. São Paulo, p. 131, 2019, disponível em https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881. Acesso em: 22 fev 2020.

Juan López Linares
Universidade de São Paulo, Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA-USP)
<jlopez@usp.br>

Alexys Bruno-Alfonso
UNESP, Faculdade de Ciências de Bauru, Departamento de Matemática
<alexys.bruno-alfonso@unesp.br>

Grazielle Feliciani Barbosa
Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Matemática (DM-UFSCar)
<grazielle@dm.ufscar.br>

Recebido: recebido

Agradecimentos

Agradecemos aos professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT